$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .. nekonečná řada , $a_n \in \mathbb{R}$.

Připomeň: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q|<1$, $q \in \mathbb{C}$.

Pro $|q|<1$ řada konverguje:

$\left|\frac{1}{1-q}\right| < \infty$. (má konečný součet)

Řady s nezápornými členy:

$a_n \geq 0$ pro všechna n.

SK: nechť $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$\sum b_n$ K $\Longrightarrow$ $\underbrace{\sum a_n \text{ K}}_{\text{speciálně má součet}}$

LSK: nechť $\boxed{a_n \geq 0}$, $\boxed{b_n \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$.

zadání

volíme my

nechť $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existuje. Pak:

(i) $L \in (0, \infty) \Longrightarrow$

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ K} \right)$

(ii) $\boxed{L < \infty}$ $L=0$ $\Longrightarrow$

$\left(\sum b_n \text{ K} \Longrightarrow \sum a_n \text{ K} \right)$

(iii) $\boxed{L > 0}$ $L=\infty$ $\Longrightarrow$

$\left(\sum a_n \text{ K} \Longrightarrow \sum b_n \text{ K} \right)$

Srovnávací: máme 2 řady, které porovnáme.

Fakt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ K. $\iff$ $\alpha > 1$.

Konkrétně: • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Harmonická řada) D.

Tj. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$

Ovšem $s_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ rostou pomalu:

$\lim_{N\to\infty} \frac{s_N}{\ln N} = 1$ ... $s_N \sim \ln N$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, dokonce $= \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$

(Víme-li $\sum \frac{1}{n} = \infty$, pak $0 \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$

kdyby $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ K. $\overset{SK}{\Longrightarrow}$ $\sum \frac{1}{n}$ K.,

což je spor. Tedy $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ D.

SK: $0 \le a_n \le b_n$

• $\underbrace{\sum b_n \text{ K}}_{\text{konvergentní majoranta}} \implies \sum a_n$ K

• $\underbrace{\sum a_n \text{ D}}_{\text{divergentní minoranta}} \implies \sum b_n$ D

Příklad: **LSK**: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)}_{\le 0}$. $\frac{1}{n} =: y \to 0$

• $\cos\frac{1}{n} \le 1 \implies$ ≤ 0

• S čím srovnat? Známá lim: $\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$

Chceme zvolit vhodnou srovnávací řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak aby LSK dalo informaci pomocí limity $\lim \frac{a_n}{b_n}$, kde

$a_n = \cos\frac{1}{n} - 1$.   „ $y = \frac{1}{n}$ " $\frac{1}{n}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2}$$

do jmenovatele $\frac{1}{n^2}$

Zvolme $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\overset{y}{\frac{1}{n}}}{\underset{y^2}{\frac{1}{n^2}}} \overset{\text{H.V.}}{=} \frac{1}{2} \in (0,\infty)$$

LSK $\Rightarrow$ $\sum |a_n|$ K. $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ K.

Ale $\sum b_n$ K podle faktu, $\sum a_n$ také K.

$$\sum \frac{1}{n^2} \left(= \frac{\pi^2}{6}\right) < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2 n + n \underbrace{\sin\frac{n^2\pi}{4}}_{\text{konstanta}}}}_{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

LSK: $b_n = \frac{1}{n^2}$ ... „srovnávací řada"

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2 n + n\sin\frac{n^2\pi}{4}}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\underbrace{\left(n + \frac{\sin\dots}{n}\right)}_{\to n}} = \frac{1}{n} \in (0,\infty).$$

Tedy $\sum a_n$ K $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ K

Tedy $\sum a_n$ K.

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(\underbrace{n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1}_{\geq 0} \Big)}_{=: a_n}$$

Teorie: • $\sum a_n$ konverguje absolutně, pokud $\sum |a_n| < \infty$.

• Věta: $\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

$$|a_n| = |(-1)^n| \cdot \left| n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right| = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1$$

$$= e^{\underbrace{\frac{1}{n^2+1} \ln n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}} - 1 \qquad \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

a_n

b_n

1\. KROK: LSK1: $b_n := \frac{\ln n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{e^{\frac{1}{n^2+1}\ln n} - 1}{\frac{\ln n}{n^2+1}} \overset{\text{H.V.}}{=} 1 \in (0,\infty).$$

H.V.: Posl.: $\frac{\ln n}{n^2+1} \to 0$

$\forall n \geq 2$: $\neq 0$ — známá lim

Vnější funkce $g(y) = \frac{e^y - 1}{y}$ ... $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$

$$\Rightarrow \lim g\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right) = 1.$$

LSK1: $\Rightarrow \left(\sum |a_n| \; K \iff \sum b_n \; K \right)$

Ale jak je to s $\sum b_n$? K?

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1} < \infty \; ?$$

$\to 0$

2\. KROK:

LSK2: ŠPATNĚ $c_n = \frac{1}{n^2}$: $\lim \frac{b_n}{c_n} = \lim \frac{\frac{\ln n}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} =$

$$= \lim \frac{n^2}{n^2+1} \cdot \lim \ln n = 1 \cdot \infty = \infty$$

$\sum b_n \, K \Rightarrow \sum c_n \, K.$

SPRÁVNĚ: $d_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. $\sum d_n$ K. (Fakt)

$$\lim \frac{b_n}{d_n} = \lim \frac{\frac{\ln n}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim \frac{n^{3/2} \cdot \ln n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1+0} \cdot 0 = 0$$

Tedy podle LSK: $\sum d_n$ K $\Rightarrow \sum b_n$ K.

Ale $\sum d_n$ K! $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$

Celkem $\sum b_n$ K. $\Rightarrow$ $\sum |a_n|$ K.

(dříve: $\Leftrightarrow$)

$\Rightarrow \sum a_n$ K.

nebo: $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

$$\lim \frac{|a_n|}{b_n} = \lim \frac{e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1}{\frac{1}{n^{3/2}}} =$$

$$= \lim \underbrace{\frac{e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1}{\frac{\ln n}{n^2+1}}} \cdot \underbrace{\frac{n^{3/2} \ln n}{n^2+1}} =$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

Tedy $\sum b_n$ K $\Rightarrow \sum |a_n|$ K

Ale $\sum b_n$ K! $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$. Tedy $\sum |a_n|$ K.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ K. $\iff$ $\alpha > 1$

<u>Věta</u> (Integrální kritérium konvergence):
Nechť $f: [1,\infty) \to [0,\infty)$ je monotónní.
Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ K. $\iff$ $\int_1^\infty f(t)\,dt < \infty$.

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $\quad \sum \frac{1}{n^\alpha} = \sum f(n)$ K.
$\iff \int_1^\infty f$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \overset{\alpha \neq 1}{=} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \right]_1^\infty = \begin{cases} 0 - \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

<u>$\alpha = 1$</u>: $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^\infty = \infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sum(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\underbrace{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}_{\to 0,\ \geq 0}}\right)$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

<u>ABS. K.</u>: $|a_n| = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (>0), $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \in (0, \frac{1}{2})$

Srovnáme s $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}}_{\to 1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$1 \cdot \lim \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(1+\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1}\right)} = \frac{1}{2} \in (0, \infty)$$

Tedy $\sum |a_n|$ K. $\Leftrightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ K,

ale $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ D. Tedy $\sum |a_n|$ D.

<u>Relativní konvergence</u>:

<u>Leibnizovo kritérium</u>: Jestliže $a_n \downarrow 0$, pak $\sum (-1)^n a_n$ K.

$$a_n := \sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

klesající, $\in (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0, \frac{\pi}{2})$, kde $\sin$ je rostoucí.

Tedy $\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \downarrow 0$. Leibniz $\Rightarrow \sum a_n$ K

Celkem $\sum a_n$ R.K.